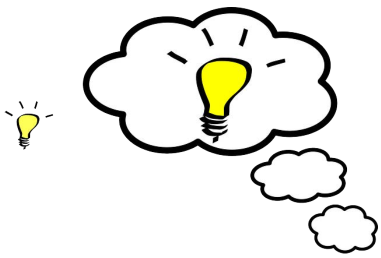
<u>Der Unterschied zwischen Proportionalität und Antiproportionalität</u>



Um zwei Größen miteinander zu vergleichen - z.B. Strecken oder Geschwindigkeiten - bildet man ihren Quotienten oder ihr Verhältnis. Z.B. legt ein Radrennfahrer in einer Stunde 40 km zurück, ein Fußgänger in einer Stunde 5 km. Der Quotient der beiden Geschwindigkeiten ist 40 : 5 = 8; d.h. der Radrennfahrer legt in einer Stunde die 8fache Strecke zurück wie der Fußgänger. Man sagt auch, die Geschwindigkeiten oder auch die zurückgelegten Strecken stehen im Verhältnis 8 zu 1. Haben zwei Verhältnisse den gleichen Wert, so drückt man dies durch eine **Verhältnisgleichung oder Proportion** aus.

Wenn der Radrennfahrer zwei Stunden fährt, legt er 80 km zurück, der Fußgänger in derselben Zeit 10 km. Das Verhältnis der beiden zurückgelegten Strecken ist wieder 80 : 10 = 8. Die eine Größe nimmt also im selben Verhältnis wie die andere Größe zu. Man sagt, dass hier eine **direkte Proportionalität** vorliegt: je mehr km der Radrennfahrer in einer bestimmten Zeit zurücklegt, desto mehr legt auch der Fußgänger zurück.

Nun denk dir eine Luftpumpe für dein Fahrrad. Du musst den Kolben in die Pumpe drücken, um die Luft in den Reifen zu pumpen. Je kleiner das Volumen in der Luftpumpe wird, desto größer ist der Luftdruck. In diesem Fall nimmt eine Größe zu - der Luftdruck - und die andere Größe ab - das Volumen. Man sagt, hier liegt eine **Antiproportionalität** vor. Manchmal bezeichnet man diesen Fall auch als indirekte Proportionalität.

Eine Proportion ist eine Gleichung. Auf Gleichungen kann man alle Regeln für das Umformen von Gleichungen anwenden. Da Proportionen sehr häufig auftreten, ist es zweckmäßig, spezielle Regeln anzugeben, die eine schnelle Behandlung der Proportionen ermöglichen.

Oft ist eine Proportion in folgender Form gegeben: a : b = c : d. Für diese Form gilt die Regel:

*das Produkt der Außenglieder (im Beispiel a und d) ist gleich dem Produkt der Innenglieder (im Beispiel b und c), also: a * d = b * c.*

Nehmen wir einmal an, du musst die Proportion 4 : x = 12 : 6 bearbeiten. Dann musst du das Produkt der Außenglieder 4 * 6 gleich dem Produkt der Innenglieder 12 * x setzen: 12x = 24. Wenn du diese Gleichung durch 12 dividierst, findest du x = 2 als Lösung der Proportion.

Eine andere Regel gilt für das Vertauschen der Glieder:

In einer Proportion dürfen folgende Vertauschungen durchgeführt werden: die beiden Außenglieder, die beiden Innenglieder, die Innen- gegen die Außenglieder und die beiden Seiten.

An einem Beispiel soll dies demonstriert werden: a : b = c : d geht durch Vertauschen der Außenglieder über in d : b = c : a. Wenn du jetzt das Produkt der Außenglieder (d und a) gleich dem Produkt der Innenglieder (b und c) setzt, also a * d = b * c, findest du dieselbe Produktgleichung wie oben.

1.) Die folgende Tabelle soll eine proportionale (antiproportionale) Zuordnung beschreiben. Ergänze die fehlenden Zahlen.

1.Wert	*7*	*9*	*2/3*		*3/7*
2.Wert	*2/7*			*1.5*	

2.) Wie rechnet man diese 2 Textgleichungen?

a) Eine Grundstücksparzelle von 1224 m^2 wird geteilt. Es entstehen zwei neue Grundstücke mit Flächen von 600 m^2 und 624 m^2. Der Anliegerbeitrag für die gesamte Parzelle beträgt 30600 € und soll entsprechend der Grundstücksfläche von den beiden neuen Eigentümern gezahlt werden. Wie viel € muss jeder Eigentümer bezahlen?

b) Eine Grundstückseigentümerin zahlte für zwei Grundstücke 19200 € Anliegerbeiträge. Sie will die beiden Grundstücke verkaufen. Beim Verkauf sollen die neuen Eigentümer auch die Anliegerbeiträge bezahlen. Diese wurden nach den an der Straße angrenzenden Grundstücksseiten berechnet. Die eine ist 19 m lang, die andere 29. Berechne den Anliegerbeitrag für jedes Grundstück.

Der Dreisatz hilft bei Berechnungen zu proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen. Zunächst zu den proportionalen Zuordnungen. Eine Zuordnung der Größe A zur Größe B ist proportional, wenn die Größe A im gleichen Maß wie die Größe B steigt.

Nr.3)
2 kg Nüsse kosten 24,50 €. Wie viel kosten 3,8 kg Nüsse?

Nr. 4)
12 Flaschen Cola kosten 13,92 €. Wie viel kosten 10 Flaschen?

Nr.5)

Der Schall benötigt für eine Strecke von 1000 m Länge ungefähr 3 Sekunden. Wie weit ist die Stelle des Blitzeinschlages entfernt, wenn man den Donner 5 s nach dem gesehenen Blitz hört.

Für antiproportionale Zuordnungen ändert sich das Verfahren ein wenig:

Nr.6)

5 Kamele können in insgesamt 12 Tagen einen Proviantvorrat von A nach B transportieren. Dabei trägt jedes Kamel gleich viel. Welche Zeit wird benötigt, wenn 6 Kamele zur Verfügung stehen?

Mache dir klar, wo die Unterschiede zur Vorgehensweise bei proportionaler Zuordnung liegen. Probiere, die Lösung über die Tabellenform zu finden.

Nr.7)

Ein Tank soll mit drei gleichartigen Pumpen leer gepumpt. Sie benötigen dafür 7 Stunden. Leider fällt eine Pumpe gleich zu Beginn aus. Wie lange brauchen die verbleibenden zwei Pumpen?

Nr.8)

1. Um das Erdmaterial aus einer Baugrube abzufahren, benötigen 4 LKW 18 Tage, wobei 9 Stunden je Tag gearbeitet werden. Nach 5 Tagen werden 2 weitere LKW eingesetzt. In wie viel Tagen und Stunden wird die gesamte Arbeit erledigt?

Nr.9)

Es ist eine Zuordnung A --> B durch folgende Tabelle gegeben:

A	*2,0*	*4,4*	*4,8*	*8,0*	*6,6*
B	*2,5*	*5,5*	*6,0*	*10,0*	*8,25*

Frage A: Um welche Art Zuordnung handelt es sich. Begründe deine Aussage. Gib 3 praktische Beispiele von Zuordnungen von Größen an, die auch dieser Art entsprechen.

Frage B: Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und fülle die Lücken entsprechend der oben angegebenen Tabelle aus.

A	*3*	*?*	*12*	*7,2*	*?*
B	*?*	*7*	*?*	*?*	*9,25*

Nr. 10)

Das Füllen eines Tankes dauert 15 Minuten, wenn 510 l pro Minute eingefüllt werden.
Welche Füllzeit ergibt sich bei 450 l pro Minute ?

Lösungen

1.) Bei einer proportionalen Zuordnung gilt, dass der erste Wert geteilt durch den zweiten Wert den sogenannten Proportionalitätsfaktor liefert. Mithilfe dieses Faktors kann man dann die restlichen Werte berechnen.

$$7:\frac{2}{7}=7\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{2}$$

Das ist der Proportionalitätsfaktor. Nun rechnet man in der zweiten Spalte:

$$9:x=\frac{49}{2}\Leftrightarrow x=\frac{18}{49}$$

In der dritten Spalte rechnet man analog.

In der vierten Spalte erhält man:

$$x:1.5=\frac{49}{2}\Leftrightarrow x=\frac{49\cdot 1.5}{2}=36.75$$

und die letzte Spalte errechnet sich analog zur 2. und 3. Spalte.

Bei einer antiproportionalen Zuordnung gilt, dass das Produkt aus zwei zueinander gehörenden Werten immer gleich ist. In diesem Fall rechnet man so:

$$7\cdot\frac{2}{7}=2$$

Zu dem Wert 9 in der zweiten Spalte gehört also der Bruch 2/9, zu dem Wert 1.5 würde demnach der Wert 4/3 gehören; denn 4/3 mal 1.5 = 2

<u>2)</u>

zu a: Zunächst ermitteln wir den Anliegerbeitrag pro m^2:

Anliegerbeitrag pro m^2 = 30600 € / 1224m^2 = 25 €/m^2

Wenn wir nun diesen Betrag mit der jeweiligen Fläche multiplizieren erhalten wir die Anliegerkosten für die jeweilige Fläche.

Für 600m^2:

Anliegerkosten = 600m^2· 25 € /m^2 = 15000 €

Für 624m^2:

Anliegerkosten = 624m^2· 25 €/m^2 = 15600 €

In der Summe natürlich wieder die 30600 €.

Zu b: Hier werden die Kosten nicht nach Fläche, sondern nach Grundstücklänge abgerechnet.
Anliegerbeitrag je m = 19200 € / 48 m = 400 €/m
Für 29m Länge: Kosten = 400 € /m· 29m = 11600 €
Für 19m Länge: Kosten = 400 € · 19m = 7600 €
In der Summe natürlich wieder 19200 €.

3.)

1. Satz
2 kg kosten 24,50 €. Es wird aufgeschrieben, was gegeben ist.
2. Satz
1 kg kostet
$\frac{24,50}{2}$ € = 12,25 €. Es wird berechnet, wie viel 1kg kostet. (Auch "Schluss auf die Einheit" genannt.)
3. Satz
3,8 kg kosten 3,8· 12,25 € = 46,55 €. Es wird berechnet, wie viel 3,8 kg kosten. (Auch "Schluss auf die Vielheit" genannt.)
Da die drei Sätze für die Lösung wichtig sind, spricht man auch vom Dreisatz.
Da diese Schreibweise recht lang ist, nutzt man oft auch die Tabellenform.

4.)

Anzahl der Flaschen	Preis in €
12 :12 ↓ 12 ·10↓ 10	13,92 ↓ : 12 1,16 ↓ · 10 11,60

Die 10 Flaschen kosten somit 11,60 €.

5.)

Die richtige Lösung ist rund 1670 m.

6.)

Diese Zuordnung ist antiproportional: je mehr Kamele eingesetzt werden, um so weniger Zeit wird benötigt.
<u>1. Satz</u>
5 Kamele benötigen 12 Tage Es wird aufgeschrieben, was gegeben ist.
<u>2. Satz</u>
1 Kamel benötigt 5· 12 Tage = 60 Tage Es wird berechnet, wie viel Zeit ein Kamel benötigt.
<u>3. Satz</u>
6 Kamele benötigen
60 / 6 Tage = 10 Tage. Es wird berechnet, wie viel Zeit 6 Kamele brauchen.

7.)

Lösung: 10,5 Stunden

8.)

Hier geht es um eine Aufgabe, die sich mit Antiproportionalität und Proportionalität beschäftigt. Zunächst folgt aus der Aufgabe, dass 4 LKW 18 Tage benötigen. Je mehr LKW eingesetzt werden, desto weniger Tage werden benötigt, damit liegt eine Antiproportionalität vor. Die Zahlenpaare einer Antiproportionalität sind produktgleich.
Damit folgt der Ansatz:
Gegebenes Zahlenpaar: (18 / 4)
Gesuchtes Zahlenpaar: (x / 6)
Lösung: aus der Produktgleichheit folgt mit x · 6 = 18 · 4 für x = 12. 6 LKW benötigen 12 Tage.

Weiter folgt aus der Aufgabenstellung, dass 5 Tage 4 LKW arbeiten, d.h. von dem Erdmaterial sind 5/18 abgefahren, es bleiben 13 / 18 von dem Erdmaterial übrig. Nun ist zu prüfen, welche Zeit die 6 LKW für dieses Erdmaterial benötigen. Es folgt der Ansatz:
Gegebenes Zahlenpaar: ((13/18) / 1)

Gesuchtes Zahlenpaar: (x / 12)

Lösung: aus der Quotientengleichheit folgt mit x / 12 = (13 / 18) / 1 für x = 8 2/3. Da pro Arbeitstag 9 Stunden gerechnet werden, beträgt die Gesamtzeit 5 Tage plus 8 Tage und 6 Stunden, also 13 Tage und 6 Stunden.

9.)

Zu a)

Die angegebene Zuordnung ist auf jeden Fall eine je-mehr-desto-mehr-Zuordnung also ein Kandidat für eine Proportionalität. Nun muss man nur noch prüfen, ob alle Zahlenpaare quotientengleich sind. Diese Überprüfung ergibt, dass der Quotient für alle Zahlenpaare den Wert 1,25 hat.

Zu b)

A	3	8,75	12	7,2	11,5625
B	2,4	7	9,6	5,76	9,25

10)

Das Füllen eines Tankes dauert 15 Minuten, wenn 510 l pro Minute eingefüllt werden.
Welche Füllzeit ergibt sich bei 450 l pro Minute ?

Dieses Füllproblem ist ein typisches Beispiel für umgekehrte Proportionalität.

Füllzeit und Füllgeschwindigkeit sind umgekehrt proportional. Fließen beispielweise nur halb soviel Liter in einer Minute ein , verdoppelt sich dadurch die Einfüllzeit. Umgekehrt gilt: Fließen doppelt so viele Liter pro Minute ein ist die Einfüllzeit nur halb so lang.
Wenn statt 510 Liter pro min nur 450 Liter einfließen, dauert das Füllen länger.

Bei umgekehrter Proportionalität gilt Produktgleichheit der Wertepaare.

$$510 \cdot 15 = 450 \cdot x \quad |:450$$

$$x = \frac{510 \cdot 15}{450}$$

x=17 Das Füllen dauert also 17 Minuten.